0228

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021 (2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021 (2022)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය | | | | | | | |

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න **1 - 10**) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න **11 - 17**).
* **A කොටස**
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. සාධකවලට වෙන් කරන්න: $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

2. $\mathbb{Z}$ සියලු නිඛිල කුලකය මත $5a+b$ යන්න 3 න් බෙදේ නම්, aRb මගින් අර්ථ දැක්වූ සම්බන්ධයක් R යැයි ගනිමු. $\mathbb{Z}$ මත R තුල්‍යතා සම්බන්ධයක් බව පෙන්වා, 0 හි තුල්‍යතා පන්තිය ලියා දක්වන්න.

විභාග අංකය

0228

3. $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ යැයි ද $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $g^{-1}(x) = 2x - 1$ යැයි ද ගනිමු.

$f^{-1}(x)$ හා $g(x)$ සොයා $g\left(2f^{-1}(0)\right) = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

4. $$\begin{vmatrix} x^3+x & x+1 & x-2 \\ 2x^3+3x+1 & 3x & 3x-3 \\ x^3+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

බව පෙන්වන්න.

5. $y^2 = 4ax$ පරාවලය මත වූ $P \equiv (ap^2, 2ap)$ හා $Q \equiv (aq^2, 2aq)$ ලක්ෂ්‍ය යා කරන ජ්‍යාය පරාවලයේ නාභිය හරහා යයි. $pq = -1$ බව පෙන්වා P හා Q හිදී පරාවලයට ඇඳි ස්පර්ශක ලම්බ වන බව **අපෝහනය** කරන්න.

6. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x + |x|}{\beta x - |x|} & ; \quad x \neq 0 \text{ නම්} \\ -1 & ; \quad x = 0 \text{ නම්} \end{cases} \quad \text{හා} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{\alpha x} & ; \quad x \neq 0 \text{ නම්} \\ -\beta & ; \quad x = 0 \text{ නම්} \end{cases}$$

යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha > 0$ හා $\beta \in \mathbb{R}$ වේ.

$x = 0$ හි දී $f(x)$ හා $g(x)$ සන්තතික බව දී ඇත. α හා β හි අගයන් සොයන්න.

7. $f(x)=\begin{cases} x^3 & ; \quad x\geq 0 \text{ නම්} \\ -x^2 & ; \quad -1<x<0 \text{ නම්} \\ -x-2 & ; \quad x\leq -1 \text{ නම්} \end{cases}$

යැයි ගනිමු. $x=0$ හි දී $f(x)$ අවකලා බව ද $x=-1$ හි දී $f(x)$ අවකලා නොවන බව ද පෙන්වන්න.
$x\neq -1$ සඳහා $f'(x)$ ලියා දක්වන්න.

8. $x=0$ වන විට $y=1$ අවශ්‍යතාවට යටත්ව, $\tan y\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{1+x}+(1+x)e^x\sec y=0$ අවකල සමීකරණය විසඳන්න.

9. $\mathbb{R}$ මත f යනු සන්තතික තාත්වික අගයැති ශ්‍රිතයක් යැයි ද $a > 0$ යැයි ද ගනිමු.

$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} \{f(a-x) + f(a+x)\}\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

10. $r = 2\cos\theta + 4\sin\theta$ මගින් ධ්‍රැවක සමීකරණය දෙනු ලබන වක්‍රයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

$\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ ධ්‍රැවක ඛණ්ඩාංක සහිත ඉහත වක්‍රය මත ලක්ෂ්‍යයේදී වූ ස්පර්ශකයේ ධ්‍රැවක සමීකරණය සොයන්න.

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021 (2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021 (2022)

උසස් ගණිතය I
உயர் கணிதம் I
Higher Mathematics I

11 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) A, B හා C යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. ඔබ යොදා ගන්නා කුලක වීජයෙහි නියමයන් පැහැදිලිව ප්‍රකාශ කරමින්,

(i) $(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$ හා

(ii) $(A'-B)\cap C'=(A'-C)-(B-C)$

බව පෙන්වන්න; මෙහි $A-B$ යන්න $A\cap B'$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ.

(*b*) පා පන්දු, පැසි පන්දු හා අත් පන්දු ක්‍රීඩකයින් සමූහයක

(i) ක්‍රීඩකයින් 8 දෙනෙකුට පා පන්දු හා පැසි පන්දු ද,

(ii) ක්‍රීඩකයින් 5 දෙනෙකුට පා පන්දු හා අත් පන්දු ද,

(iii) ක්‍රීඩකයින් 7 දෙනෙකුට පැසි පන්දු හා අත් පන්දු ද,

(iv) ක්‍රීඩකයින් 29 දෙනෙකුට පා පන්දු හෝ පැසි පන්දු ද,

(v) ක්‍රීඩකයින් 30 දෙනෙකුට පා පන්දු හෝ අත් පන්දු ද,

(vi) ක්‍රීඩකයින් 25 දෙනෙකුට පැසි පන්දු හෝ අත් පන්දු ද,

ක්‍රීඩා කළ හැකි බව දී ඇත. ක්‍රීඩකයින් කොපමණකට පා පන්දු ක්‍රීඩා කළ හැකි දැයි සොයන්න.

12. (*a*) $a, b, c > 0$ යැයි ගනිමු.

(i) $ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$ බව පෙන්වා, $abc^2 \le \frac{1}{4}\left(a^4+b^4+2c^4\right)$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) **ඒ නයින්**, $abc \le \left(\dfrac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c}\right)$ බව පෙන්වන්න. සමානතාව පවතින්නේ $a=b=c$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ පරිණාමනය xy - තලයේ ලක්ෂ්‍ය $x'y'$ - තලයේ ලක්ෂ්‍යවලට අනුරූපණය කරයි.

ඒවා මතටම අනුරූපණය කරන සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

$x'y'$ - තලයේ $y=2x-1$ රේඛාවෙහි ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13. ධන නිඛිලමය දර්ශකයක් සඳහා **ද මුවාවර් ප්‍රමේයය** ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන්,

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ බව හා

$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\cot 4\theta = \dfrac{\cot^4\theta - 6\cot^2\theta + 1}{4(\cot^3\theta - \cot\theta)}$ බව පෙන්වන්න.

$\cot 4\theta = \sqrt{3}$ විසඳා $x = \cot\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$ යන්න $x^4 - 4\sqrt{3}x^3 - 6x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$ සමීකරණයෙහි විසඳුමක් බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයෙහි අනෙක් විසඳුම් ද k හි අගයන් ප්‍රකාශ කරමින් $\cot\left(\dfrac{k\pi}{24}\right)$ ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න.

$\cot\dfrac{\pi}{24} + \cot\dfrac{7\pi}{24} + \cot\dfrac{13\pi}{24} + \cot\dfrac{19\pi}{24} = 4\sqrt{3}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

14.(*a*) C_1 හා C_2 යනු පිළිවෙළින් $y = (x-1)^2 + 1$ හා $(y-2)^2 = 16x$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර යැයි ගනිමු. ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් C_1 හා C_2 හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.

C_1 හා C_2 වක්‍ර මගින් සපර්යන්ත වන R පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

$y = 1$ රේඛාව වටා R පෙදෙස 2π රේඩියනවලින් භ්‍රමණය කිරීමෙන් ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව ද සොයන්න.

(*b*) වක්‍ර කුලයක් $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 5}{-x + 2y + 5}$ යන අවකල සමීකරණය මගින් අර්ථ දක්වනු ලබයි. මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන මෙම කුලයට අයත් වක්‍රයේ සමීකරණය සොයන්න.

15.(*a*) $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$ යැයි ගනිමු.

$n \geq 2$ සඳහා $I_n = \left(\dfrac{2n}{2n+5}\right) I_{n-1}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^1 x^4 (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx$ හි අගය සොයන්න.

(*b*) x^3 හි පදය දක්වා එයත් ඇතුළත්ව x හි ආරෝහණ බලවලින් $\cos x$ හා e^x හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණි සොයන්න.

ඒ නයින්, x^3 හි පදය දක්වා එයත් ඇතුළත්ව x හි ආරෝහණ බලවලින් $e^{-x}\cos(x^2)$ හි මැක්ලෝරින් ශ්‍රේණිය ලබා ගන්න.

මෙය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^{0.1} x e^{-x} \cos(x^2)\, dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

16. $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $bx\cos\theta+ay\sin\theta=ab$ බව ද $(r\cos\phi, r\sin\phi)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $x^2+y^2=r^2$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ සමීකරණය $x\cos\phi+y\sin\phi=r$ බව ද පෙන්වන්න.

C යනු $x^2+y^2=36$ වෘත්තය ද, S යනු $\dfrac{x^2}{9^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ ඉලිප්සය ද යැයි ගනිමු. C වෘත්තය හා S ඉලිප්සය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයක් $(6\cos\phi, 6\sin\phi)$ යැයි සිතමු. $\tan^2\phi=\dfrac{4}{9}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, හෝ අන් අයුරකින් හෝ S ඉලිප්සය හා C වෘත්තය ඡේදනය වන ලක්ෂ්‍යයන් හිදී ඒවාට ඇඳි ස්පර්ශක අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\dfrac{5}{9}\right)$ බව පෙන්වන්න.

17. (*a*) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{2+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$ යැයි ගනිමු.

(i) $x\in\mathbb{R}$ සඳහා $0\leq f(x)\leq\dfrac{3}{5}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $f(x)=\dfrac{3}{5}$ හා $f(x)=0$ සමීකරණ විසඳා $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) පහත වගුවෙන්, 0 හා 1.2 අතර දිග 0.2 ක් වූ ප්‍රාන්තරවලදී වූ x හි අගයන් සඳහා $f(x)$ ශ්‍රිතයෙහි අගයන් දශමස්ථාන දෙකකට නිවැරදිව දෙයි.

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$f(x)$	1.12	2.01	0.00	1.11	1.65	2.42	1.61

සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන්, $I=\displaystyle\int_0^{1.2} f(x)\,\mathrm{d}x$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^{1.2} x f'(x)\,\mathrm{d}x$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

***

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය							

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න **1 - 10**) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න **11 - 17**).
* **A කොටස**
  සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

* සංඛ්‍යාන වගු සපයනු ලැබේ.
* g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(11) උසස් ගණිතය II		
කොටස	**ප්‍රශ්න අංකය**	**ලකුණු**
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න

A කොටස

1. $A \equiv (-2, -1, -1), B \equiv (3, 1, 2)$ හා $C \equiv (1, \alpha, -\beta)$ යනු $\overrightarrow{OA}$ හා $\overrightarrow{OC}$ අතර කෝණය $\frac{2\pi}{3}$ හා $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OC}|$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු; මෙහි $\alpha, \beta > 0$ වේ. α හා β හි අගයන් සොයන්න.

2. $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \mathbf{k}$ හා $\mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \mathbf{k}$ බල දෙකක් පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ හා $\gamma\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$ පිහිටුම් දෛශික සහිත ලක්ෂ්‍යවලදී ක්‍රියාකරයි. මෙහි $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ වේ. ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන බව දී ඇත. α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න. ඒවායේ සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

[තුන්වැනි පිටුව බලන්න.

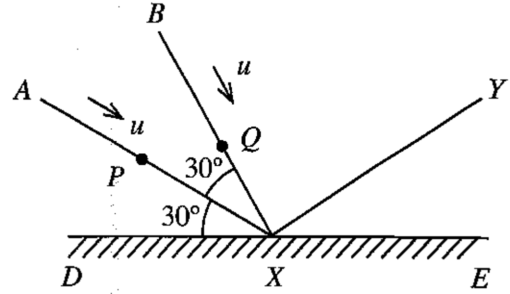
0228

3. අරය a, උස $4a$ හා ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක් ඝනත්වය ρ වූ සමජාතීය ද්‍රවයක, ද්‍රවයේ නිදහස් මතුපිටට a දුරක් ඉහළින් එහි ශීර්ෂය ඇතිව කොටසක් ගිලී පාවේ. $\frac{\sigma}{\rho}$ අනුපාතයේ අගය සොයන්න. ද්‍රවයෙහි සම්පූර්ණයෙන්ම ගිල්වීමට කේතුවේ ශීර්ෂයට සම්බන්ධ කළ හැකි අංශුවේ අඩුම බර සොයන්න.

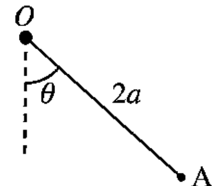
4. P අංශුවක t කාලයේදී ත්වරණය $a(t) = 6t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + e^{t}\mathbf{k}$ මගින් දෙනු ලබයි. $t = 0$ දී P අංශුවේ පිහිටුම් දෛශිකය හා ප්‍රවේගය පිළිවෙළින් $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ හා $\mathbf{k}$ වේ. t කාලයේදී P හි පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

[හතරවැනි පිටුව බලන්න.

5. එක එකෙහි ස්කන්ධය m වූ P හා Q අංශු දෙකක් සුමට තිරස් තලයක එක එකක් u වේගයක් සහිතව සුමට සිරස් බිත්තියක් දෙසට චලනය වෙමින් DE රේඛාවේදී බිත්තිය හමුවේ. P ට පෙර Q, X වෙත ළඟාවෙමින්, X හිදී අංශු දෙකම බිත්තිය සමග ගැටේ. P හි චලිත දිශාව AX දිගේ වේ; මෙහි $A\hat{X}D = 30°$ වේ. Q හි චලිත දිශාව BX දිගේ වේ; මෙහි $B\hat{X}D = 60°$ වේ. P හා Q දෙකම බිත්තිය සමග ගැටීමෙන් පසු එකම $\overrightarrow{XY}$ දිශාවට චලනය වේ (රූපය බලන්න). P හා බිත්තිය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. Q හා බිත්තිය අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{e}{3}$ බව පෙන්වන්න.
බිත්තිය සමග ගැටුමෙන් පසු P හා Q හි වේගයන් අතර අනුපාතය $\sqrt{3}:1$ බව පෙන්වන්න.



6. දිග $2a$ හා ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර OA දණ්ඩක් සිරස් තලයක අසවි කරන ලද O කෙළවර වටා භ්‍රමණය වීමට නිදහස ඇත. යටිඅත් සිරස සමග $\frac{2\pi}{3}$ ක කෝණයක් පිහිටුමක අල්වා තබා මුදා හරියි. යටිඅත් සිරස සමග දණ්ඩ θ කෝණයක් සාදන විටදී කෝණික වේගය $\dot{\theta}$ යන්න $a\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}g(1+2\cos\theta)$ තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.



[පස්වැනි පිටුව බලන්න.

7. ආපනශාලාවක සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් පාරිභෝගිකයෙක් තම උදෑසන ආහාර වේල සමග තේ කෝප්පයක් ඇණවුම් කිරීමේ සම්භාවිතාව 0.6 ක් වේ. පාරිභෝගිකයන් 5 දෙනෙකුගේ සසම්භාවී නියැදියක් තෝරාගතහොත්,

(i) එක පාරිභෝගිකයෙකු පමණක්,

(ii) පාරිභෝගිකයන් තුන් දෙනෙකුට වඩා අඩුවෙන්,

තම උදෑසන ආහාර වේල සමග තේ ඇණවුම් කිරීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

8. නාගරික ප්‍රදේශයක, අහඹු ලෙස මාසයකට දෙවතාවක් විදුලි විසන්ධිවීම් ඇති වේ. දෙන ලද මාසයකදී,

(i) විදුලි විසන්ධිවීම් නොමැතිවීමේ,

(ii) අවම වශයෙන් විදුලි විසන්ධිවීම් 2 ක් වත් ඇතිවීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

[හයවැනි පිටුව බලන්න.

9. X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{c}x^2 & , \quad |x|\leq 1 \text{ සඳහා} \\ 0 & , \quad \text{එසේ නොවේ නම්}\end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ. මෙහි c නියතයක් වේ. c හි අගය සොයන්න.
තවද, $E(X)$ හා $V(X)$ සොයන්න.

10. නොනැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් එක් වරක් පෙරළනු ලැබේ. ලැබුණු අගය X යැයි ද $Y=\frac{1}{2}X^2$ යැයි ද ගනිමු. $E(X)$ හා $E(Y)$ සොයන්න.

* *

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2021(2022)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2021(2022)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2021(2022)

උසස් ගණිතය II
உயர் கணிதம் II
Higher Mathematics II

11 S II

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. $A \equiv (1, 0, 0), B \equiv (0, 1, 0)$ හා $C \equiv (0, 0, 1)$ යනු ලක්ෂ්‍ය තුනක් යැයි ගනිමු.
$2\overrightarrow{AB}$, $3\overrightarrow{AC}$ හා $\overrightarrow{BC}$ බල පිළිවෙළින් AB, AC හා BC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියාකරයි.

(i) පද්ධතිය, A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $\mathbf{R}$ තනි බලයකට හා $\mathbf{G}$ යුග්මයකට ඌනනය වන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{R}$ හා $\mathbf{G}$ නිර්ණය කළ යුතුව ඇත.

(ii) දැන් $\mathbf{F}$ බලයක් ඉහත පද්ධතියට හඳුන්වා දෙයි.

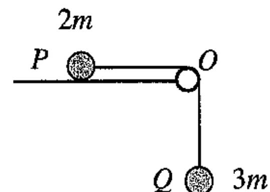
(a) $\mathbf{F}$ මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියාකරයි නම් හා පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ නම් $\mathbf{F}$ හා යුග්මයේ විශාලත්වය සොයන්න.

(b) පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ සහිත ලක්ෂ්‍යය හරහා $\mathbf{F}$ ක්‍රියාකරයි නම් හා පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් c හා d හි අගයන් සොයන්න.

12. අරය a වූ වෘත්තාකාර ආස්තරයක් එහි පෘෂ්ඨය සිරස්ව ඇතිව ρ නියත ඝනත්වයකින් යුතු සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ එහි කේන්ද්‍රය O ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨයට a ගැඹුරකින් පිහිටන පරිදි ය. ආස්තරය මත ද්‍රව තෙරපුමේ විශාලත්වය $\pi a^3 \rho g$ බව පෙන්වා, ආස්තරයේ පීඩන කේන්ද්‍රය එහි සිරස් විෂ්කම්භය මත O කේන්ද්‍රයට $\dfrac{a}{4}$ දුරක් පහළින් පිහිටන බවත් පෙන්වන්න.

අරය a වූ හා උස $2a$ වූ ඝන ඍජු වෘත්තාකාර කේතුවක්, එහි උඩම ලක්ෂ්‍යය ද්‍රවයේ නිදහස් පෘෂ්ඨය මත ඇතිව ද එහි අක්ෂය තිරස්ව ද, ρ නියත ඝනත්වයකින් යුතු සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත. කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

13. රළු තිරස් මේසයක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය $2m$ වූ P අංශුවක්, මේසයේ දාරයට සවි කළ O කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් ස්කන්ධය $3m$ වූ Q අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. P හා Q අංශු හා තන්තුව සිරස් තලයක පිහිටයි.



P සහ මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\dfrac{1}{2}$ යැයි ගනිමු. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, තන්තුව තදව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හැරේ. අංශු චලනය වීමට පටන් ගන්නා බව පෙන්වන්න.

Q අංශුව චලනය වන්නේ, එහි වේගය v වන විට, mkv ප්‍රතිරෝධ බලයක් යොදන ප්‍රතිරෝධී මාධ්‍යයකය; මෙහි $k (> 0)$ නියතයකි.

$5\dfrac{dv}{dt} = 2g - kv$ බව පෙන්වන්න.

$\dfrac{g}{k}$ ක වේගයකට ළඟා වීමට P ට ගතවන කාලය හා P මෙම කාලය තුළදී ගමන් කළ දුර සොයන්න. (මෙම කාලය තුළ Pට, O වෙත ළඟා නොවීමට තරම් තන්තුවේ දිග ප්‍රමාණවත් යැයි උපකල්පය කරන්න.)

14. සමාන අරයන්ගෙන් යුත් A හා B සුමට ගෝල දෙකක් සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. A හි ස්කන්ධය m හා B හි ස්කන්ධය $2m$ වේ. ගෝල එකිනෙක දෙසට ප්‍රක්ෂේප කරන අතර ඒවා ගැටෙන විට ඒවායේ කේන්ද්‍ර යා කරන රේඛාව $\mathbf{j}$ ට සමාන්තර වන අතර පිළිවෙළින් A හා B හි ප්‍රවේග $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ හා $-\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$ වේ; මෙහි $\alpha > 0$ වේ. A හා B අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ ද ගැටුමට මොහොතකට පසු Q ගෝලයේ ප්‍රවේගය $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ වේ.

(i) α හි අගය ද

(ii) ගැටුමට මොහොතකට පසු P ගෝලයේ ප්‍රවේගය ද

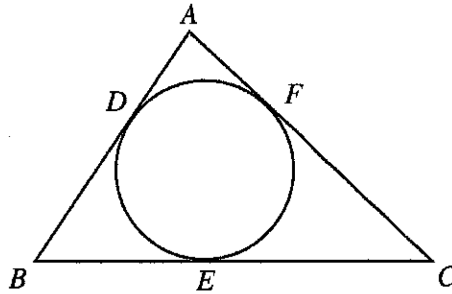
(iii) ගැටුම නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය ද

(iv) B මගින් A මත ආවේගය ද

සොයන්න.

15. එක එකක් ස්කන්ධය m හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර දඬු 3 කින් සමන්විත රාමුවක් ABC ත්‍රිකෝණයක ආකාරයට දෘඪ ලෙස සවි කර ඇති අතර, රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර වෘත්තාකාර මුදුවක් එම ත්‍රිකෝණයේ අන්තර්ගත කර ඇත. මුදුව, AB, BC හා CA දඬුවලට පිළිවෙළින් D, E හා F හිදී දෘඪ ලෙස සවි කර ඇත; මෙහි D, E හා F යනු පිළිවෙළින් AB, BC හා CA හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ.

A තුළින් වූ රාමුවේ තලයට ලම්බ අක්ෂය වටා රාමුවේ අවස්ථිති ඝූර්ණය $\frac{23}{3}ma^2$ බව පෙන්වන්න.



A තුළින් වූ රාමුවේ තලයට ලම්බ සුමට තිරස් අචල අක්ෂයක් වටා රාමුව භ්‍රමණය විය හැක. රාමුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය A ට පහළින් පිහිටන පරිදි, සමතුලිත පිහිටුමේ සිට රාමුවට කුඩා විස්ථාපනයක් ලබා දී, නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරින ලදී. රාමුවේ චලිතය ආසන්න වශයෙන් සරල අනුවර්තීය බව පෙන්වා එහි ආවර්ත කාලය $2\pi\sqrt{\frac{23a}{8\sqrt{3}g}}$ බව පෙන්වන්න.

16. (*a*) X විවික්ත සසම්භාවී විචල්‍යයට පහත දී ඇති සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය ඇතැයි සිතමු.

X	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.3	0.4	0.15	0.05

$Y = 2X + 1$ ලෙස ගනිමු. Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙනු ලැබේ.

Y	1	3	5	7	9
$P(Y=y)$	0.1	0.3	p	q	0.05

(i) p හා q හි අගයන් සොයන්න.

(ii) $E(Y)$ හා $\text{Var}(Y)$ සොයන්න.

(iii) $P(Y > 3)$ සොයා, **ඒ නයින්** $P(X > 1)$ සොයන්න.

(*b*) (i) නොනැඹුරු කාසි 3 ක් උඩ දැමීමේදී ලැබෙන අගයන් ගණන X යැයි ගනිමු. X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා, **ඒ නයින්** $E(X)$ හා $\text{Var}(X)$ සොයන්න.

(ii) X හි අගය ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් නම්, මුහුණතේ 3 හෝ 6 ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3}$ ට සමාන, නැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් පෙරළනු ලැබේ. එසේ නොමැති නම් මුහුණතේ 3 හෝ 6 ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{1}{3}$ ට සමානවන, නැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් පෙරළනු ලැබේ.

Y විචල්‍යය පහත ලෙස අර්ථ දැක්වේ.

$$Y = \begin{cases} 2, & \text{දාදු කැටයේ මුහුණතේ අගය 3 න් බෙදිය හැකි නම්,} \\ 1, & \text{එසේ නොමැති නම්,} \end{cases}$$

Y හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය සොයා **ඒ නයින්** $E(Y)$ හා $\text{Var}(Y)$ සොයන්න.

17. (*a*) X සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයේ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය

$$f_X(x) = \begin{cases} 10x^2(1-x) & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{එසේ නොවන විට} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලැබේ.

$E(X)$ හා $\text{Var}(X)$ සොයන්න.

තවද $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ සොයන්න.

Y සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යය $Y = \frac{3X+2}{4}$ මගින් අර්ථ දක්වනු ලැබේ නම්, $E(Y)$ හා $\text{Var}(Y)$ සොයන්න.

(*b*) නාගරික ප්‍රදේශයක දෛනික ගෘහස්ථ ප්‍රවාහන වියදම්, මධ්‍යන්‍යය රු. 2000 ක් හා සම්මත අපගමනය රු. 400 ක් ඇතිව ප්‍රමතව ව්‍යාප්ත වී ඇතැයි සිතමු.

(i) සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් ගෘහයක දෛනික ප්‍රවාහන වියදම Rs. 2500 කට වඩා වැඩිවීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ගෘහයන් 10% ක දෛනික ප්‍රවාහන වියදම රු. k ට වඩා වැඩි බව දී ඇත. k හි අගය සොයන්න.

* * *

0000564